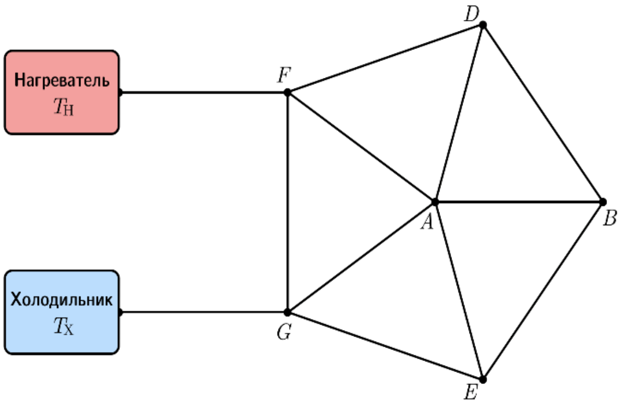
Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. В результате большого невезения снаряд, выпущенный из пушки с начальной скоростью $v_0 = 300$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, взорвался на восходящей части траектории на высоте равной трём четвертям от максимальной, разлетевшись на два осколка. Осколки поразили сразу две цели: планируемую и стреляющую. Причем тот осколок, который поразил планируемую цель, в момент взрыва имел только горизонтальную составляющую скорости. Определите с какой задержкой во времени осколки поразят каждый свою цель. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/c. Сопротивлением воздуха пренебречь.

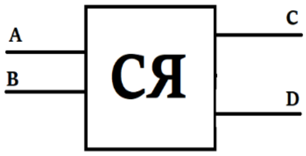
Задача 2. Два резервуара, в которых поддерживаются температуры $T_н = 73°$C и $T_х = -11°$C, соединены между собой с помощью 12 одинаковых теплопроводящих стержней так, как показано на рисунке. Резервуар при большей температуре называется нагревателем, а резервуар при меньшей температуре — холодильником. Теплопроводящая система теплоизолирована. Приток тепла осуществляется только от нагревателя, а отвод — только через холодильник.



1. Сравните установившиеся температуры точек A и B соединения стержней.
2. Во сколько раз разность установившихся температур на концах стержня FA больше разности установившихся температур на концах стержня DB?
3. Определите разность установившихся температур на концах стержня DB.
4. Найдите установившуюся температуру точки E соединения стержней.

Считайте, что мощность теплового потока P вдоль стержня (количество теплоты, проходящее в единицу времени) пропорциональна разности температур ΔT на его концах, то есть $P = k \cdot \Delta T$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Задача 3. Экспериментатор Костя провел серию измерений над серым ящиком, показанным на рисунке. Внутри ящика оказалось 4 светодиода. Костя поочередно замыкал разными способами на батарейку контакты, выходящие из серого ящика. Потом он решил еще попарно соединять провода. Итоги вы можете увидеть в таблице, где в третьем столбце показано количество включённых диодов. Помогите Косте восстановить схему подключения светодиодов внутри серого ящика. Диоды считайте идеальными.

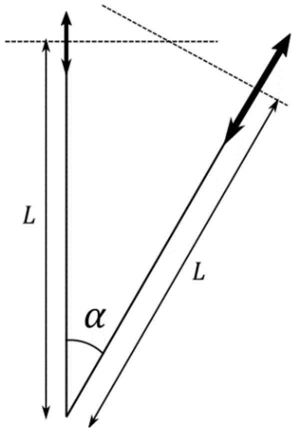


“+”	“–”	Кол-во
A	B	0
A	C	1
A	D	0
B	A	2
C	A	0
D	A	1
B	C	4

“+”	“–”	Кол-во
B	D	1
C	B	0
D	B	0
C	D	0
C	D	0
D	C	3

“+”	“–”	Кол-во
BD	C	3
B	AC	3
A	CD	1
AB	C	3
B	AD	1
D	BC	3

Задача 4. Две собирающие линзы, имеющие радиусы 1.5 см и 4 см, расположены под углом $\alpha = 2/7$ рад друг к другу, как показано на рисунке. Их оптические оси лежат в одной плоскости, на Рисунке они показаны штрихованными линиями. Расстояние $L = 36$ см. Фокусное расстояние левой линзы f в два раз меньше фокусного расстояния правой линзы. Известно, что если пустить луч горизонтально слева на левую лизну на $y = 72/49$ см выше оптической оси, то он пройдёт через вторую линзу и в итоге отклонится на $\beta = 9/98$ рад вниз. Каково фокусное расстояние каждой линзы? Считайте, что приближение $\sin\varphi \approx \varphi$ работает вплоть до углов $\varphi \approx \pi/6$, а также тем, что при малых углах $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$.



Задача 5. Из корабельной пушки произвели выстрел под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, когда корабль находился над Марианской впадиной. Марианская впадина представляет собой длинный желоб глубиной $h = 10$ км. Направление выстрела совпало с направлением вдоль желоба. Расчётная дальность выстрела равна 10 000 м при условии, что полёт снаряда производится над сушей. Однако из-за того, что плотность воды меньше плотности земной коры, ускорение свободного падения над Марианской впадиной немного отличается от его значения над сушей. Оцените, на сколько будет отличаться дальность полета снаряда от расчётной. Считайте, что средняя плотность земной коры равна $\rho_к = 3\,000$ кг/м^3, а средняя плотность планеты Земля равна $\rho_з = 5\,500$ кг/м^3. Корабль считать неподвижным, сопротивлением воздуха пренебречь.

9 класс. Решения.

Предложение оценки: каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи; разбалловка приведена из расчёта 20 баллов на задачу.

Задача 1. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). В результате большого невезения снаряд, выпущенный из пушки с начальной скоростью $v_0 = 300$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, взорвался на восходящей части траектории на высоте равной трём четвертям от максимальной, разлетевшись на два осколка. Осколки поразили сразу две цели: планируемую и стреляющую. Причем тот осколок, который поразил планируемую цель, в момент взрыва имел только горизонтальную составляющую скорости. Определите с какой задержкой во времени осколки поразят каждый свою цель. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/c. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: Введём декартову систему координат $\{\mathrm{x}, \mathrm{z}\}$, где x – горизонтальная координата, z – вертикальная; положение стреляющего примем за начало координат. Расстояние от места выстрела до цели равно

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Максимальная высота траектории невзорвавшегося снаряда h_{max} и высота точки взрыва равны соответственно

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \qquad h = \frac{3 v_0^2 \sin^2\alpha}{8g} = \frac{3}{32}\frac{v_0^2}{g}, \qquad \frac{h_{max} - h}{h_{max}} = \frac{1}{4}.$$

Расстояние по горизонтали от цели равно $L_1 = 3L/4 = (\sqrt{3}/8)(v_0^2/g)$; иными словами, координаты точки разрыва снаряда равны $(L/4, h)$. Зная L_1 и h, мы можем найти скорость осколка u_1, поразившего цель из уравнения:

$$\frac{gL_1^2}{2u_1^2} = h \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \sqrt{3} v_0 \cos\alpha = \frac{3v_0}{2},$$

а также и время t_1, прошедшее с момента разрыва снаряда до поражения цели:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\sqrt{3} v_0}{4g} \approx 1.299 \text{ с.}$$

Теперь определим скорость (u_{2x}, u_{2z}) второго осколка. Пусть масса первого осколка равна βm, масса второго – $(1-\beta)m$, где m – масса неразорвавшегося заряда. Непосредственно перед разрывом скорость заряда была равна $(v_0 \cos\alpha, (v_0/2)\sin\alpha)$. Из закона сохранения импульса находим

$$\frac{3v_0}{2}\beta + (1-\beta)u_{2x} = v_0\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad u_{2x} = \frac{\sqrt{3}-3\beta}{2(1-\beta)}v_0,$$

$$(1-\beta)u_{2z} = \frac{v_0\sin\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad u_{2z} = \frac{v_0}{4(1-\beta)}$$

Коэффициент разбиения по массам β найдём из условия, что траектория второго осколка проходит через точку $(0,0)$. Сама траектория задаётся выражением

$$z = h + \frac{u_{2z}}{u_{2x}}\left(x - \frac{L}{4}\right) - \frac{g(x-L/4)^2}{2(u_{2x})^2}.$$

Подставляя сюда точку $(0,0)$ и выражение для L, получаем

$$0 = \frac{3}{32} + \frac{1}{2\left(\sqrt{3}-3\beta\right)}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{64}\cdot\frac{4(1-\beta)^2}{\left(\sqrt{3}-3\beta\right)^2}.$$

Это уравнение можно переписать в виде квадратного уравнения

$$\beta(1-2\sqrt{3}+4\beta) = 0,$$

у которого корни $\beta_1 = (2\sqrt{3}-1)/4 \approx 0.616$ и $\beta_2 = 0$. Второе решение должно быть откинуто, поскольку оно описывает тривиальный вариант, когда масса первого куска равна нулю; то есть, когда преждевременного разрыва снаряда вовсе и не было. Таким образом, надо выбрать только первое решение. Теперь, время от взрыва до попадания в стреляющего второго куска, равно

$$t_2 = -\frac{\frac{L}{4}}{u_{2x}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2(1-\beta)}{8\cdot\left(3\beta-\sqrt{3}\right)}\frac{v_0}{g} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{v_0}{g} \approx 43 \text{ с.}$$

Искомая разница времён оказывается равной,

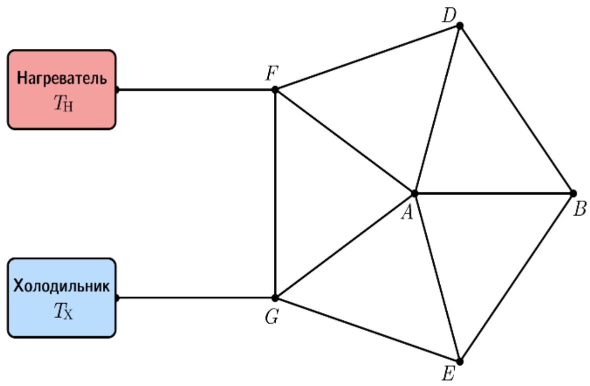
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v_0}{g} = 30 \text{ с.}$$

Первой будет поражена цель.

Разбалловка.

Найдена максимальная высота подъема	2 балла
Найдено расстояние между стрелявшим и целью	2 балла
Найдено время полета первого осколка	1 балл
Найден момент взрыва снаряда	2 балла
Записан закон сохранения импульса	2 балла
Записаны выражения для нахождения скоростей осколков после взрыва	2 балла
Записано уравнение траектории для первого осколка	2 балла
Найдено разбиение по массам	3 балла
Найдено время полета второго осколка	2 балла
Получен правильный ответ	2 балла

Задача 2. Термодинамика.



Условие (Пенкина Полина Васильевна). Два резервуара, в которых поддерживаются температуры $T_н = 73°C$ и $T_х = -11°C$, соединены между собой с помощью 12 одинаковых теплопроводящих стержней так, как показано на рисунке. Резервуар при большей температуре называется нагревателем, а резервуар при меньшей температуре — холодильником. Теплопроводящая система теплоизолирована. Приток тепла осуществляется только от нагревателя, а отвод — только через холодильник.

1. Сравните установившиеся температуры точек A и B соединения стержней.
2. Во сколько раз разность установившихся температур на концах стержня FA больше разности установившихся температур на концах стержня DB?
3. Определите разность установившихся температур на концах стержня DB.
4. Найдите установившуюся температуру точки E соединения стержней.

Считайте, что мощность теплового потока P вдоль стержня (количество теплоты, проходящее в единицу времени) пропорциональна разности температур ΔT на его концах, то есть $P = k \cdot \Delta T$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Решение. Рассмотрим систему в установившемся состоянии. Она симметрична относительно прямой AB. Это означает, что мощности теплопередачи в симметричных стержнях одинаковы (рис.1). Из закона сохранения энергии для соединения B следует, что мощность теплопередачи вдоль стержня AB отсутствует, поэтому $T_A = T_B$.

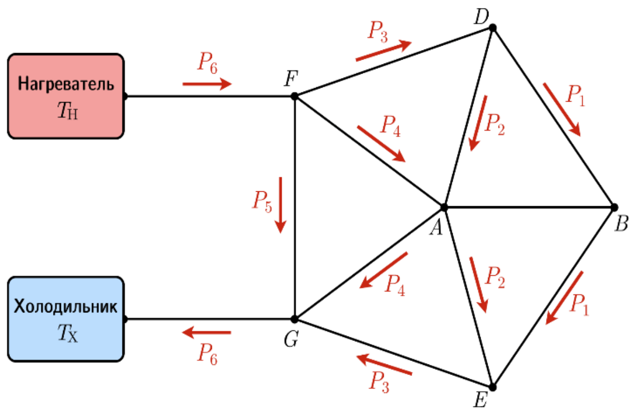


Рисунок 1

Пусть $P_1 = P$. Выразим разность температур между точками D и E по направлениям DBE и DAE:

$$T_D - T_E = P_1/k + P_1/k = 2P/k и T_D - T_E = P_2/k + P_2/k = 2P_2/k.$$

Выходит, что $P_2 = P$.

Далее, из закона сохранения энергии для точки D следует, что $P_3 = P_1 + P_2 = 2P$.

Выразим теперь разность температур между точками F и A по направлениям FA и FDA:

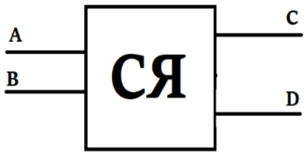
$$T_F - T_A = P_4/k и T_F - T_A = P_3/k + P_2/k = 3P/k.$$

Выходит, что $P_4 = 3P$. Это означает, что разность установившихся температур на концах стержня FA больше разности установившихся температур на концах стержня DB в 3 раза.

Выразим разность температур между точками F и G по направлениям FG и FAG:

$$T_F - T_G = P_5/k \qquad \text{и} \qquad T_F - T_G = P_4/k + P_4/k = 6P/k.$$

Отсюда заключаем, что $P_5 = 6P$.



Из закона сохранения энергии для точки F следует, что $P_6 = P_3 + P_4 + P_5 = 11P$. На рис.2 приведено распределение мощностей теплопередачи в установившемся состоянии системы.

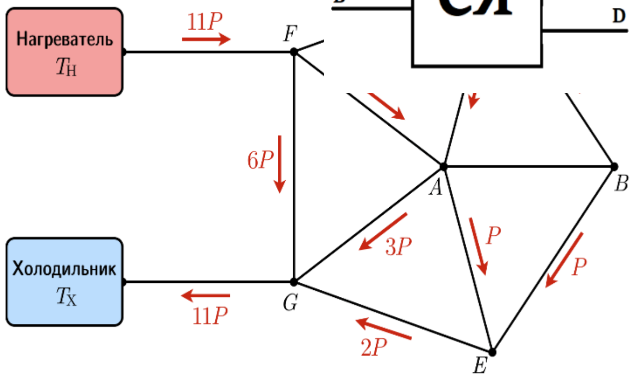


Рисунок 2

Выразим разность температур между нагревателем и холодильником по направлению НFGХ и разность температур между точками D и B по направлению DB:

$$T_{\text{н}} - T_{\text{х}} = P_6/k + P_5/k + P_6/k = 28P/k$$

и

$$T_D - T_B = P/k.$$

Видим, что

$$T_D - T_B = (T_{\text{н}} - T_{\text{х}})/28 = 3°C.$$

Для нахождения установившейся температуры в точке E рассмотрим направление EGХ:

$$T_E - T_{\text{х}} = P_3/k + P_6/k = 13P/k,$$

откуда

$$T_{\text{E}} = T_{\text{х}} + 13(T_{\text{н}} - T_{\text{х}})/28 = 28°C.$$

Итак, соберём ответы на вопросы в условии:

1. $T_A = T_B$;
2. В 3 раза;
3. $T_D - T_B = (T_{\text{н}} - T_{\text{х}})/28 = 3°\text{C}$;
4. $T_E = T_{\text{х}} + 13(T_{\text{н}} - T_{\text{х}})/28 = 28°\text{C}$.

Разбалловка.

Ответ на первый вопрос	5 баллов
Ответ на второй вопрос	5 баллов
Ответ на третий вопрос	5 баллов
Ответ на четвёртый вопрос	5 баллов

Задача 3. Электричество

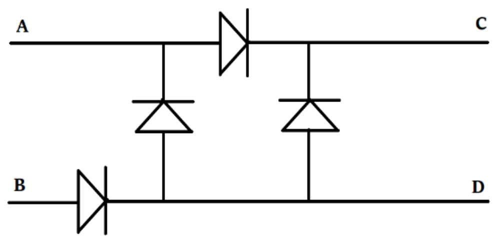
Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Экспериментатор Костя провел серию измерений над серым ящиком, показанным на рисунке. Внутри ящика оказалось 4 светодиода. Костя поочередно замыкал разными способами на батарейку контакты, выходящие из серого ящика. Потом он решил еще попарно соединять провода. Итоги вы можете увидеть в таблице, где в третьем столбце показано количество включённых диодов. Помогите Косте восстановить схему подключения светодиодов внутри серого ящика. Диоды считайте идеальными.

“+”	“—”	Кол-во
A	B	0
A	C	1
A	D	0
B	A	2
C	A	0
D	A	1

“+”	“—”	Кол-во
B	C	4
B	D	1
C	B	0
D	B	0
C	D	0
D	C	3

“+”	“—”	Кол-во
BD	C	3
B	AC	3
A	CD	1
AB	C	3
B	AD	1
D	BC	3

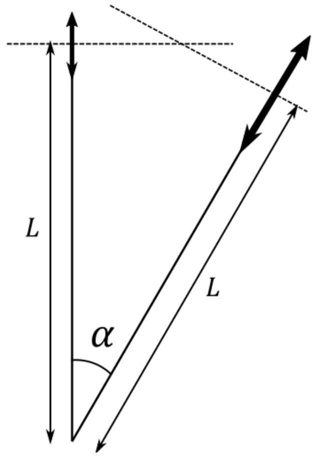
Решение. Из результатов подключения (B-C, C-B) пары контактов следует, что при таком подключении диоды оказываются направленными все в одну сторону. Из результатов подключения пар контактов (A-B, B-A), (B-D, D-B) и (A-C, C-A) делаем вывод, что между этими парами контактов контактами находится существует путь в один диод, причём остальные диоды либо блокируют друга, либо вообще не находятся на каком-либо пути между рассматриваемой парой контактов. Из результатов подключения пары контактов (D-C, C-D) следует, что между этой парой контактов находится 3 диода. На основании тих наблюдений делаем предположение, что схема устроена так, как показана на рисунке. Проверка этой гипотезы результатами измерений со сдвоенными контактами (правая таблица) даёт положительный результат. Таким образом, найденная схема является верным ответом.



Разбалловка.

Приведены частичные объяснение построения схемы	4 балла
Полностью объяснена схема подключения диодов	8 баллов
Приведена правильная схема	8 баллов

Задача 4. Оптика.



Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Две собирающие линзы, имеющие радиусы 1.5 см и 4 см, расположены под углом $\alpha = 2/7$ рад друг к другу, как показано на рисунке. Их оптические оси лежат в одной плоскости, на Рисунке они показаны штрихованными линиями. Расстояние $L = 36$ см. Фокусное расстояние левой линзы f в два раз меньше фокусного расстояния правой линзы. Известно, что если пустить луч горизонтально слева на левую лизну на $y = 72/49$ см выше оптической оси, то он пройдёт через вторую линзу и в итоге отклонится на $\beta = 9/98$ рад вниз. Каково фокусное расстояние каждой линзы? Считайте, что приближение $\sin\varphi \approx \varphi$ работает вплоть до углов $\varphi \approx \pi/6$, а также тем, что при малых углах $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$.

Решение. Составим уравнение на фокусное расстояние f левой линзы. После прохождения первой линзы луч отклонится на малый угол $-y/f$ (минус означает, что луч отклоняется вниз). Посчитаем, на каком расстоянии z от оси второй линзы и под каким углом θ луч пройдёт через эту линзу. Поскольку мы работаем в пределе параксиальной оптики и вторая линза повернутся на малый угол α, то по-прежнему можно считать, что угол между лучом и осью второй линзы мал. Поэтому угол равен

$$\theta = \alpha - \frac{y}{f}.$$

Расстояние (включая знак, означающий выше или ниже оптической оси) можно посчитать так: это расстояние, если бы вторая линза была соосной первой плюс расстояние, на которое смещён центр второй линзы относительно оптической оси первой линзы (оно равно $L(1-\cos(\alpha)) = \alpha^2 L/2$):

$$z = y - \frac{y}{f}\frac{L}{2} + \frac{\alpha^2 L}{2}.$$

Мы учли, что расстояние между центрами линз равно в нашем приближении $L/2$. Угол, на который отклонится луч после прохождения второй линзы, равен $-z/(2f)$. Полный угол β, на который отклонится луч, таким образом, равен

$$\beta = -\frac{y}{f} - \frac{z}{2f}.$$

Подставляя z, приходим к квадратичному уравнению

$$\left(\frac{L}{f}\right)^2 - 2\left(3 + \frac{L}{2y}\alpha^2\right)\frac{L}{f} - \frac{L}{y}\beta = 0.$$

Решением, которое соответствует собирающей линзе, является $L/f = 9$, то есть $f = 4$ см. При этом $z = -180/49 \approx -3.7$, что, как и должно быть, меньше радиуса правой линзы, равного по условию 4 см.

Разбалловка.

Записано отклонение луча после прохождения первой линзы	2 балла

Найден угол, под которым войдет луч во вторую линзу	2 балла
Определено смещение центра второй линзы относительно оси первой линзы	2 балла
Найдено расстояние до оси, на котором луч входит во вторую линзу	3 балла
Найден угол отклонения после прохождения второй линзы	2 балла
Найден полный угол отклонения после прохождения двух линз	3 балла
Найдены фокусные расстояния линз	4 балла
Получен ответ	2 балла

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Из корабельной пушки произвели выстрел под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, когда корабль находился над Марианской впадиной. Марианская впадина представляет собой длинный желоб глубиной $h = 10$ км. Направление выстрела совпало с направлением вдоль желоба. Расчётная дальность выстрела равна 10 000 м при условии, что полёт снаряда производится над сушей. Однако из-за того, что плотность воды меньше плотности земной коры, ускорение свободного падения над Марианской впадиной немного отличается от его значения над сушей. Оцените, на сколько будет отличаться дальность полета снаряда от расчётной. Считайте, что средняя плотность земной коры равна $\rho_к = 3\,000$ кг/м^3, а средняя плотность планеты Земля равна $\rho_з = 5\,500$ кг/м^3. Корабль считать неподвижным, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Плотность воды составляет $\rho_в = 1\,000$ кг/м^3, что меньше, чем плотность каменистых пород суши $\rho_к$, поэтому над Марианской впадиной ускорение свободного падения будет немного меньше. Значит, снаряд пролетит расстояние, превышающее расчётное.

Оценим разницу ускорений свободного падения над сушей и над Марианской впадиной. Воспользуемся принципом суперпозиции, верным для слабого гравитационного поля. Для того, чтобы с точки зрения результирующего ускорения свободного падения заменить каменистые породы на воду, надо на каменистые породы наложить субстанцию с отрицательной плотностью $\Delta\rho = \rho_в - \rho_к = -2\,000$ кг/м^3. Размер по вертикали области, заполненной этой субстанцией, равен глубине Марианской впадины h. Её ширина нам не известна, но она точно не меньше её глубины. Поэтому изменение ускорения свободного падения над впадиной оценивается как

$$\Delta g \sim Gh\Delta\rho, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная. Полное же ускорение свободного падения создаётся всей массой Земли, оно равно

$$g = \frac{M_з}{R^2} = \frac{4\pi}{3} GR\rho_з, \qquad (2)$$

где $R = 6\,400$ км – радиус Земли, а $M_з$ – её масса. Точное выражение (2) оправдывает оценку (1), хотя геометрически Марианскую впадину следует представить скорее как плоский слой толщиной h (в частности, поперечная ширина впадины значительно больше её глубины). В этом случае коэффициент $4\pi/3$ должен быть заменён на $2\pi.$ Но поскольку нам надо сделать только оценки, то эта поправка является несущественной.

Теперь, дальность полёта определяется формулой

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

где α – угол к горизонту, под котором был выпущена снаряд, а v_0 – его начальная, скорость, то разница дальностей выстрела над Марианской впадиной и над сушей равна

$$\Delta L = L\left(\frac{g}{g + \Delta g} - 1\right) \approx -L\frac{\Delta g}{g} \sim \frac{(-\Delta\rho)}{\rho_з}\frac{h}{R}L \approx 6 \text{ м}.$$

Разбалловка.

Записана формула для g	2 балла
Найдено изменение Δg над впадиной	8 балла
Записана формула для разницы дальности выстрела	6 балла
Получен верный ответ	4 балла